PROGRAMME DE COLLES n°22

RÉVISIONS

Les points suivants ne devront pas faire l'objet d'un exercice spécifique en colle, mais pourront être rencontrés au cours d'un exercice portant sur l'une ou l'autre des thématiques détaillées dans les parties suivantes :

- Détermination du domaine de définition d'une fonction.

On rappelle que pour les fonctions ayant un exposant dépendant de la variable x , on doit écrire avant toute chose :

$$(u(x))^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$$

- Formules de dérivation.
- Méthodes de calcul de limites de fonctions.
- Mise en œuvre du théorème de la bijection pour montrer qu'une certaine équation admet une unique solution. Méthode permettant alors d'obtenir un encadrement de la solution.
Ceci pourra par exemple être utile pour déterminer le signe d'une dérivée lorsque celui-ci ne peut pas s'obtenir par la résolution directe d'une inéquation.
- Obtention du tableau de variations de la fonction réciproque d'une fonction bijective.
Aucun théorème de dérivation de la fonction réciproque n'est au programme.
- Utilisation de la fonction réciproque de f pour étudier le comportement d'une suite implicite u_n solution d'une équation du type $f(x) = a_n$, où a_n est donné explicitement en fonction de n .
Ceci pourra faire l'objet d'une extension d'exercice après une étude de fonction.

ÉTUDES DE FONCTIONS

Le but est de maîtriser les outils permettant d'aboutir au tracé de la courbe représentative d'une fonction en suivant une démarche plus ou moins guidée par l'énoncé. On évitera tout excès de technicité calculatoire.

Savoir-faire attendus :

- Reconnaître qu'un réel x_0 est un « point à problème » pour l'étude d'une fonction :
 - Cas d'une fonction prolongée en x_0 , borne de l'ensemble de définition, du type :

$$f(x) = \begin{cases} \dots & \text{si } x > x_0 \\ \dots & \text{si } x = x_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad f(x) = \begin{cases} \dots & \text{si } x < x_0 \\ \dots & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

- Cas d'une fonction définie par intervalles changeant d'expression en x_0 , du type :

$$f(x) = \begin{cases} \dots & \text{si } x > x_0 \\ \dots & \text{si } x \leq x_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad f(x) = \begin{cases} \dots & \text{si } x \leq x_0 \\ \dots & \text{si } x > x_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad f(x) = \begin{cases} \dots & \text{si } x < x_0 \\ \dots & \text{si } x = x_0 \\ \dots & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

- Cas d'une fonction ayant un terme de la forme $\sqrt{u(x)}$ dans son expression : tout réel x_0 tel que $u(x_0) = 0$ est un « point à problème ».
- [Si la fonction f n'admet pas de point à problème sur I .]
Justifier que f est dérivable (respectivement de classe $\mathcal{C}^2$) sur I en reconnaissant des opérations sur les fonctions dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^2$) : somme, différence, produit, inverse à dénominateur qui ne s'annule pas, quotient à dénominateur qui ne s'annule pas, composition.
Concrètement s'il n'y a pas de point à problème, toute opération licite (dénominateur non nul pour un quotient, composition bien définie) transforme des fonctions dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^2$) en une fonction dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^2$).
Hormis le cas d'une fonction ayant un terme de la forme $\sqrt{u(x)}$ dans son expression, on pourra être assez bref pour la dérivabilité de la composition en indiquant « en tant que composée de fonctions dérivables » sans préciser les intervalles concernés.
La nuance entre « deux fois dérivable » et « de classe $\mathcal{C}^2$ » n'est pas essentielle à ce stade. Par contre la dérivabilité (resp. le caractère $\mathcal{C}^2$) doit être systématiquement justifiée (à minima énoncée) avant de calculer $f'(x)$ (resp. $f''(x)$).

- [Si la fonction f n'admet pas de point à problème sur I .]

Calculer la dérivée f' , étudier son signe et en déduire le tableau de variations de f , limites comprises.

- [Si la fonction f n'admet pas de point à problème sur I .]

Calculer la dérivée seconde f'' , étudier son signe et en déduire l'étude de la convexité de f .

On rappelle que pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I :

- f est convexe sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq 0$.
 f est concave sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \leq 0$.
- f est convexe sur I si et seulement si sur I la courbe de f est située au-dessus des tangentes en tout point de I .
 f est concave sur I si et seulement si sur I la courbe de f est située en-dessous des tangentes en tout point de I .
- f admet un point d'inflexion à l'abscisse x_0 si et seulement si f change de convexité en x_0 .
Les coordonnées de ce point d'inflexion sont alors données par $(x_0, f(x_0))$.
- Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en un point x_0 en lequel f est dérivable :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

En particulier $f'(x_0)$ donne le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 .

- Étudier le comportement au « point à problème » x_0 pour une fonction f prolongée en x_0 , borne de l'ensemble de définition :

- f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- f est dérivable en x_0 si et seulement si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tend vers une limite finie ℓ en x_0 .
Dans ce cas on a $f'(x_0) = \ell$.
Si la limite du taux d'accroissement en x_0 est infinie, alors la courbe de f admet une (demi)-tangente verticale à l'abscisse x_0 .

- Étudier le comportement au « point à problème » x_0 pour une fonction f définie par intervalles changeant d'expression en x_0 , par exemple de la forme :

$$f(x) = \begin{cases} d(x) & \text{si } x \geq x_0 \\ g(x) & \text{si } x < x_0 \end{cases}$$

- f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- Si la fonction g considérée seule est dérivable en x_0 , alors f est dérivable à gauche en x_0 et $f'_g(x_0) = g'(x_0)$.
Sinon la dérivabilité à gauche de f en x_0 s'étudie via la limite $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
- Si la fonction d considérée seule est dérivable en x_0 , alors f est dérivable à droite en x_0 et $f'_d(x_0) = d'(x_0)$.
Sinon la dérivabilité à droite de f en x_0 s'étudie via la limite $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
- Soit f une fonction continue en x_0 et dérivable à gauche et à droite en x_0 . Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$. Dans ce cas on a $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.
Si $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$, alors f n'est pas dérivable en x_0 et la courbe de f admet un point anguleux à l'abscisse x_0 : le nombre $f'_g(x_0)$ donne la pente de la demi-tangente à gauche en x_0 et le nombre $f'_d(x_0)$ donne la pente de la demi-tangente à droite en x_0 .

→ Voir l'exercice 15 question 7 du TD10 ou le DM14 pour la rédaction attendue.

- Étudier une fonction f ayant un terme de la forme $\sqrt{u(x)}$ dans son expression :

- Si u est dérivable sur I et si pour tout x de I , $u(x) > 0$, alors f est dérivable sur I .
Dans cette situation la rédaction de la réponse doit explicitement faire apparaître le fait que $u(x) > 0$ sur I .
- Si $u(x_0) = 0$, alors x_0 est un « point à problème » et la dérivabilité de f en x_0 doit s'étudier à l'aide d'un taux d'accroissement.
Dans cette situation tout peut se produire : la fonction f peut être dérivable en x_0 , ou non, cela dépend des cas.

→ Voir l'exercice 2 du TD10 ou le DM14 pour la rédaction attendue.

- Ramener l'étude d'une fonction ayant un terme de la forme $|u(x)|$ dans son expression au cas d'une fonction définie par intervalles en supprimant les valeurs absolues :

$$|u(x)| = \begin{cases} u(x) & \text{si } u(x) \geq 0 \\ -u(x) & \text{si } u(x) \leq 0 \end{cases}$$

On rappelle que les fonctions $x \mapsto |u(x)|$ et $x \mapsto u(x)$ ont le même ensemble de définition et de continuité.

Par contre on ne dispose pas de résultats permettant de dériver une fonction faisant apparaître des valeurs absolues.

- Tracer l'allure de la courbe représentative d'une fonction en faisant la synthèse de tous les résultats précédents :
 - Placer les éventuelles tangentes horizontales et verticales.
 - Tracer la ou les tangentes dont on a calculé au préalable une équation (s'il y en a).
 - Placer les demi-tangentes au point anguleux (s'il y en a un).
 - Faire apparaître les éventuelles asymptotes horizontales ou verticales.
 - Placer les points d'inflexion (s'il y en a).
 - Placer les points d'intersection avec l'axe des abscisses (s'il y en a et si l'on peut les calculer), donnés par les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
 - Utiliser la parité pour déduire une partie non étudiée de la courbe grâce à une symétrie.
 - Seulement alors, tracer l'allure de la courbe de f .

L'étude des branches infinies (asymptotes obliques, branches paraboliques) n'est pas au programme d'ECG. Seule l'étude de la convexité permet d'avoir une idée de l'allure de la courbe d'une fonction qui admet une limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$.

ÉTUDES DE SUITES RÉCURRENTES AVEC LES ACCROISSEMENTS FINIS

Soit (u_n) une suite récurrente définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Savoir-faire attendus :

- Montrer par récurrence sur n que la suite (u_n) est bien définie et que son terme général vérifie une certaine inégalité donnée par l'énoncé.
- Détailler avec soin le raisonnement montrant que **si** la suite (u_n) converge vers une limite finie ℓ , **alors** ℓ est un point fixe de f , c'est-à-dire $\ell = f(\ell)$.
→ Voir les DM6 et DM7 pour la rédaction attendue.
- Connaître la formule des accroissements finis.
*Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .
On suppose qu'il existe un réel K tel que : $\forall x \in I, |f'(x)| \leq K$
Alors :*

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq K |x - y|$$

La formule des accroissements finis en version « inégalité double » n'est pas au programme d'ECG.

- Dans un exercice guidé, prouver que la suite (u_n) converge vers ℓ en utilisant la formule des accroissements finis :
 - On prouve que f est dérivable sur I et que : $\forall x \in I, |f'(x)| \leq K$ où I et $K \in]-1, 1[$ sont donnés par l'énoncé.
 - On utilise la formule des accroissements finis pour en déduire avec soin que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq K |u_n - \ell|$$

- On en déduit par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq K^n |u_0 - \ell|$
- On conclut avec le théorème d'encadrement.
→ Voir l'exercice 10 du TD10 ou le DM14 pour la rédaction attendue.

INFORMATIQUE

On suppose que l'on a effectué les importations suivantes :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Aucune option n'est exigible concernant les affichages graphiques, hormis celle permettant l'affichage de points isolés.

Savoir-faire attendus :

- Écrire un programme Python qui trace l'allure de la courbe représentative d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$:
 - On définit la « liste » des abscisses :
`absc=np.linspace(a,b,100)`
 - On définit la liste des ordonnées :
`ordo=[f(x) for x in absc]`

On pourra soit directement utiliser l'expression mathématique de $f(x)$ en fonction de x pour expliciter $f(x)$, soit implémenter au préalable la fonction f dans une fonction Python f .

- On affiche alors la courbe de f avec le code :

```
plt.plot(absc,ordo)
plt.show()
```

- Écrire un programme Python qui représente sur un graphique les n premiers termes d'une suite récurrente (u_n) définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$:

- On définit la « liste » des abscisses :

```
X=range(n)
```

- On définit la liste des ordonnées :

```
U=[u_0]
for k in range(1,n):
    U.append(f(U[-1]))
```

On pourra soit directement utiliser l'expression mathématique de $f(x)$ en fonction de x pour expliciter $f(U[-1])$, soit implémenter au préalable la fonction f dans une fonction Python f .

- On affiche alors la suite (u_n) sur un graphique avec le code :

```
plt.plot(X,U,"ok")
plt.show()
```

Il convient de savoir adapter la méthode au cas d'une suite ne commençant pas au rang 0.

Pour le moment on se limite à des affichages d'un nombre de termes donné par l'énoncé (boucle `for`). On reviendra dans un prochain programme de colles sur l'utilisation de la boucle `while`.