

# PROGRAMME DE COLLES n°24

---

## INFORMATIQUE

On suppose que l'on a effectué les importations suivantes :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Aucune option n'est exigible concernant les affichages graphiques, hormis celle permettant l'affichage de points isolés.  
Savoir-faire attendus :

- Écrire un programme Python qui trace l'allure de la courbe représentative d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$  :

- On définit la « liste » des abscisses :

```
absc=np.linspace(a,b,100)
```

- On définit la liste des ordonnées :

```
ordo=[f(x) for x in absc]
```

On pourra soit directement utiliser l'expression mathématique de  $f(x)$  en fonction de  $x$  pour expliciter  $f(x)$ , soit implémenter au préalable la fonction  $f$  dans une fonction Python  $f$ .

- On affiche alors la courbe de  $f$  avec le code :

```
plt.plot(absc,ordo)
plt.show()
```

- Écrire un programme Python qui représente sur un graphique les  $n$  premiers termes d'une suite récurrente  $(u_n)$  définie par son premier terme  $u_0$  et la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$  :

- On définit la « liste » des abscisses :

```
X=range(n)
```

- On définit la liste des ordonnées :

```
U=[u_0]
for k in range(1,n):
    U.append(f(U[-1]))
```

On pourra soit directement utiliser l'expression mathématique de  $f(x)$  en fonction de  $x$  pour expliciter  $f(U[-1])$ , soit implémenter au préalable la fonction  $f$  dans une fonction Python  $f$ .

- On affiche alors la suite  $(u_n)$  sur un graphique avec le code :

```
plt.plot(X,U,"ok")
plt.show()
```

Il convient de savoir adapter la méthode au cas d'une suite ne commençant pas au rang 0.

- Connaître la définition d'une valeur approchée d'un nombre :

$$x \text{ est une valeur approchée à } \varepsilon\text{-près de } \alpha \text{ si : } |x - \alpha| \leq \varepsilon$$

Cas d'une valeur approchée par défaut, d'une valeur approchée par excès.

- Écrire des programmes Python permettant d'exploiter une inégalité du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leq c \times K^n \quad \text{où } c \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } K \in ]0, 1[ \text{ sont connus}$$

et où  $(u_n)$  est une suite convergente de limite  $\ell$  inconnue.

Hors exercices sur les séries, on se contentera des questions d'informatique en lien avec cette inégalité, en admettant toutes les questions d'analyse permettant d'établir l'inégalité (sur le modèle des exercices 1 à 5 du TP n°12).

- Programme calculant une valeur approchée à précision donnée du réel  $\ell$  à l'aide d'une boucle **while**.
- Détermination par le calcul d'un entier  $n_0$  tel que  $u_{n_0}$  est une valeur approchée à précision donnée du réel  $\ell$ .
- Utilisation de l'entier  $n_0$  pour écrire un programme calculant une valeur approchée à précision donnée du réel  $\ell$  à l'aide d'une boucle **for**.

# SÉRIES

Savoir-faire attendus :

- Maîtriser les notations et méthodes de calcul associées aux sommes finies, notamment :
  - Expression explicite d'une somme géométrique.
  - Calcul d'une somme télescopique.  
*On pourra écrire directement le résultat, donné par la différence des termes d'indices extrêmes.*
  - Modification de l'indice initial ou/et de l'indice final d'une somme par ajout ou soustraction de termes.
  - Linéarité de la somme.
  - Changement d'indice.
- Maîtriser les notations et définitions associées aux séries :
  - $\sum_{k \geq 0} a_k$  ou  $\sum a_k$  pour désigner la série de terme général  $a_k$ .
  - $\sum_{k=0}^n a_k$  pour désigner la  $n$ -ième somme partielle de la série de terme général  $a_k$ .
  - $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k$  pour désigner la somme (totale) de la série de terme général  $a_k$  lorsque celle-ci converge.

On sera particulièrement attentif aux notations :

$$\text{La série } \sum_{k \geq 0} a_k \text{ converge} \iff \text{Le nombre } \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ existe} \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k \text{ est finie}$$

L'étude d'une série se fait toujours au départ par un raisonnement sur ses sommes partielles.

La notation  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$  ne peut pas être utilisée avant d'avoir prouvé que la série  $\sum_{k \geq 0} a_k$  converge.

- Étudier une série dont les sommes partielles sont télescopiques.
- Dans un exercice guidé, savoir étudier la suite  $(S_n)$  des sommes partielles d'une série à l'aide d'outils du chapitre sur les suites, puis conclure quant à la nature de la série associée.
- Connaître le résultat suivant : si la série  $\sum a_k$  converge, alors  $a_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ .  
Savoir que la réciproque est fautive : il existe des séries divergentes dont le terme général tend vers 0.  
Savoir écrire et utiliser la contraposée : si  $a_k$  ne tend pas vers 0, alors la série  $\sum a_k$  diverge grossièrement.
- Connaître le critère de convergence des séries de Riemann ainsi que le cas de la série harmonique.
- Connaître le critère de convergence et, le cas échéant, la formule donnant la somme des séries géométriques et géométriques dérivées :

$$\forall q \in ]-1, 1[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad ; \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

- Savoir qu'une série exponentielle converge toujours et connaître la formule donnant sa somme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

- Prouver la convergence d'une série et calculer sa somme à l'aide de séries usuelles en suivant le modèle de rédaction de l'exemple 15 du cours :
  - On exprime les sommes partielles de la série considérée en fonction de sommes partielles de séries usuelles.
  - On explique pourquoi les séries usuelles qui apparaissent sont convergentes.
  - On en déduit que la série de départ est convergente.
  - On calcule enfin la somme de la série de départ à l'aide des sommes des séries usuelles auxquelles on s'est ramené.

Les formules suivantes pourront notamment être utiles :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad x^k = x^{k-1} \times x \quad ; \quad \forall k \geq 1, \quad \frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$$

# VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Pour cette colle, seules les parties I et II du cours sur les variables aléatoires discrètes sont au programme.

En particulier ce qui concerne l'espérance et la variance des variables aléatoires discrètes, ainsi que les lois usuelles, n'est pas encore au programme de colles.

Savoir-faire attendus :

- Mettre en œuvre les raisonnements probabilistes vus dans le chapitre de probabilités :
  - Utilisation de l'équiprobabilité.
  - Utilisation de l'indépendance d'événements.
  - Utilisation de la formule des probabilités composées.
  - Utilisation de la formule des probabilités totales.
- Calculer la probabilité d'un union infinie d'événements incompatibles.  
*Dans ce cas la convergence de la série associée est acquise.*
- Utiliser la formule des probabilités totales avec un système complet d'événements infini.  
*Dans ce cas la convergence de la série associée est acquise. On ne distinguera par ailleurs pas système complet d'événements et système quasi-complet d'événements.*
- Prouver que la probabilité d'obtenir une infinité d'échecs au cours d'une suite illimitée d'épreuves est nulle (dans un exercice guidé sur le modèle de la question 1 de l'exemple 7).
- Distinguer événement impossible et événement négligeable, distinguer événement certain et événement presque sûr.
- Déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète (finie ou infinie).
- Connaître la condition nécessaire et suffisante assurant que les  $p_k$ , avec  $k \in I$ , définissent la loi d'une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $I$ .