PROGRAMME DE COLLES n°26

INFORMATIQUE

On suppose que l'on a effectué les importations suivantes :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Aucune technicité n'est exigible concernant les affichages graphiques.

Savoir-faire attendus :

- Utiliser l'une des commandes `rd.random` ou `rd.randint` pour simuler la réalisation d'un événement de probabilité donnée.
- Écrire un programme permettant de simuler une expérience aléatoire.
- Écrire une fonction permettant de simuler une variable aléatoire X.
  Un résultat renvoyé par une telle fonction est appelé *réalisation* de la variable aléatoire X.
  On pourra notamment s'intéresser aux cas suivants :
  − Simulation de X où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ à l'aide d'une boucle `for`.
  − Simulation de X où $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ à l'aide d'une boucle `while`.
- Interpréter un diagramme en bâtons montrant la répartition des résultats de l'expérience aléatoire considérée (sur le modèle de l'exemple 3 du TP n°13).
  Le code permettant d'obtenir un diagramme en bâtons n'est pas exigible.
- Connaître le fonctionnement des commandes `rd.randint`, `rd.binomial`, `rd.geometric` et `rd.poisson` permettant de simuler les lois discrètes usuelles.
  On n'attendra pas d'un étudiant qu'il soit autonome sur l'utilisation de ces commandes, mais il doit savoir les interpréter dans un code donné. Il faut de plus savoir que l'ajout d'un paramètre `N` *supplémentaire à ces commandes permet d'obtenir un tableau* `numpy` *contenant* `N` *réalisations indépendantes d'une variable aléatoire suivant la loi considérée.*
- Écrire un programme qui calcule une estimation de l'espérance d'une variable aléatoire à l'aide de la méthode de Monte-Carlo. Pour cela on simule un grand nombre de fois la variable aléatoire considérée puis on calcule la moyenne des valeurs observées.

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Ce chapitre sera l'occasion de réviser les résultats et les méthodes vus dans le chapitre sur les séries.

Savoir-faire attendus :

- Mettre en œuvre les raisonnements probabilistes vus dans les chapitres précédents de probabilités :
  – Utilisation de l'équiprobabilité.
  – Utilisation de l'indépendance d'événements.
  – Utilisation de la formule des probabilités composées.
  – Utilisation de la formule des probabilités totales.
  – Calcul de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire finie.
  – Propriétés des lois usuelles finies : loi certaine, loi uniforme, loi de Bernoulli et loi binomiale.
  Pour la loi uniforme, seules l'espérance et la variance de X lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ sont exigibles ; pour d'autres supports les calculs devront être détaillés.
  – Reconnaître le schéma théorique d'une loi binomiale dans un énoncé (**question de cours**).
- Calculer la probabilité d'une union infinie d'événements incompatibles.
  Dans ce cas la convergence de la série associée est acquise.
- Utiliser la formule des probabilités totales avec un système complet d'événements infini.
  Dans ce cas la convergence de la série associée est acquise. On ne distinguera par ailleurs pas système complet d'événements et système quasi-complet d'événements.

- Prouver que la probabilité d'obtenir une infinité d'échecs au cours d'une suite illimitée d'épreuves est nulle, dans un exercice guidé sur le modèle de la question 1 de l'exemple 7 (**question de cours**).
- Distinguer événement impossible et événement négligeable, distinguer événement certain et événement presque sûr.
- Déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète (finie ou infinie).
- Connaître la condition nécessaire et suffisante assurant que les p_k, avec $k \in I$, définissent la loi d'une variable aléatoire discrète à valeurs dans I.
- Connaître les formules liées aux lois discrètes infinies : loi géométrique, loi de Poisson.
- Reconnaître le schéma théorique d'une loi géométrique dans un énoncé (**question de cours**).
- Étudier l'existence de l'espérance d'une variable aléatoire discrète infinie et, le cas échéant, calculer $E(X)$.
  Questions de cours : Étude de l'espérance de X lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ ou lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
- Mettre en œuvre la linéarité de l'espérance.
- Appliquer le théorème du transfert à une variable aléatoire discrète infinie.
  Questions de cours : Étude de l'espérance de $X(X-1)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ ou lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. En déduire l'existence et la valeur de $E(X^2)$.
- Connaître la définition du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire.
- Étudier l'existence de la variance d'une variable aléatoire discrète infinie et, le cas échéant, calculer $V(X)$ à l'aide de la formule de Huygens.
  Questions de cours : Étude de la variance de X lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ ou lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
- Mettre en œuvre la formule donnant $V(aX+b)$.
- Énoncer le système complet d'événement associé à une variable aléatoire discrète et dans ce contexte appliquer la formule des probabilités totales.
- Résoudre un problème du type « loi de Poisson conditionnée en loi binomiale », dans un exercice guidé sur le modèle de l'exemple 25.