PROGRAMME DE COLLES n°27

INFORMATIQUE

On se contentera des questions d'informatique en lien avec les variables aléatoires discrètes.
Toutes les questions mathématiques nécessaires seront admises.

On suppose que l'on a effectué les importations suivantes :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Aucune technicité n'est exigible concernant les affichages graphiques.

Savoir-faire attendus :

- Utiliser l'une des commandes `rd.random` ou `rd.randint` pour simuler la réalisation d'un événement de probabilité donnée.
- Écrire un programme permettant de simuler une expérience aléatoire.
- Écrire une fonction permettant de simuler une variable aléatoire X.
  Un résultat renvoyé par une telle fonction est appelé *réalisation* de la variable aléatoire X.
  On pourra notamment s'intéresser aux cas suivants :
  - Simulation de X où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ à l'aide d'une boucle `for`.
  - Simulation de X où $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ à l'aide d'une boucle `while`.
- Interpréter un diagramme en bâtons montrant la répartition des résultats de l'expérience aléatoire considérée (sur le modèle de l'exemple 3 du TP n°13).
  Le code permettant d'obtenir un diagramme en bâtons n'est pas exigible.
- Connaître le fonctionnement des commandes `rd.randint`, `rd.binomial`, `rd.geometric` et `rd.poisson` permettant de simuler les lois discrètes usuelles.
  On n'attendra pas d'un étudiant qu'il soit autonome sur l'utilisation de ces commandes, mais il doit savoir les interpréter dans un code donné. Il faut de plus savoir que l'ajout d'un paramètre `N` *supplémentaire à ces commandes permet d'obtenir un tableau* `numpy` *contenant* `N` *réalisations indépendantes d'une variable aléatoire suivant la loi considérée.*
- Écrire un programme qui calcule une estimation de l'espérance d'une variable aléatoire à l'aide de la méthode de Monte-Carlo. Pour cela on simule un grand nombre de fois la variable aléatoire considérée puis on calcule la moyenne des valeurs observées.
- Écrire un programme qui calcule une estimation de la probabilité d'un événement à l'aide de la méthode de Monte-Carlo. Pour cela on simule un grand nombre de fois l'expérience aléatoire considérée puis on calcule la proportion des cas lors desquels l'événement considéré s'est réalisé.
- Interpréter une figure obtenue à partir de l'estimation d'une espérance ou d'une probabilité en fonction d'un paramètre de l'expérience.
  Si la figure obtenue est approximativement une droite, il faut savoir utiliser la figure pour obtenir une équation de cette droite et conjecturer une formule générale pour l'espérance ou la probabilité considérée (sur le modèle des exercices 2 et 4 du TP n°13).

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

Savoir-faire attendus :

- Justifier l'existence de l'intégrale considérée en citant la continuité de la fonction intégrée sur un intervalle contenant les bornes de l'intégrale.
- Calculer une intégrale en reconnaissant une forme usuelle de primitive (tableaux de la page 4 du cours).
- Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties.
  On citera le fait que les fonctions u et v utilisées sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le domaine considéré.

- Calculer une intégrale à l'aide d'un changement de variable.
  Le changement de variable devra systématiquement être précisé par l'énoncé.
  Aucune hypothèse n'est attendue pour la mise en œuvre d'un changement de variable.
- Utiliser la relation de Chasles pour calculer une intégrale dont la fonction intégrée a une expression qui fait apparaître une valeur absolue.
- Utiliser la relation de Chasles pour calculer l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.
- Déterminer à l'avance le signe d'une intégrale dans le cas où la fonction intégrée est de signe constant sur le domaine d'intégration considéré.
  Il est indispensable de rappeler systématiquement que les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant lorsque l'on applique la positivité de l'intégrale, même si c'est « évident ».
- Connaître l'interprétation géométrique de l'intégrale.
- Exploiter la parité éventuelle de la fonction intégrée pour calculer une intégrale sur un domaine centré en 0.
- Calculer la primitive F sur I s'annulant en a d'une fonction f continue sur un intervalle I avec $a \in I$ par la formule :

$$\forall\, x \in I, \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Une fois que l'on aura vérifié que ce qui précède est maitrisé, on pourra étendre les questions d'intégration sur les savoir-faire complémentaires suivants :

- Intégrer une inégalité entre des bornes bien choisies pour obtenir une nouvelle inégalité (sur le modèle de l'exercice 7 du TD n°13).
- Étudier une suite d'intégrales dans un exercice guidé.

Les exercices portant sur l'étude d'une fonction définie par une intégrale ne sont pas au programme de colles.